Corrigé Exam Méca des solides

Eléments cinétiques

1. C_1 et C_2 décrivent resp. un cercle de centre O, de rayon $OC_1 = \frac{l}{2}$, et $OC_2 = \frac{l}{2}$

$$\rightarrow V_{C_1/R} = \frac{l}{2}\dot{\theta} \quad , \quad V_{C_2/R} = \frac{l}{2}\dot{\theta}$$

2. $I_{C_1x}(AB) = m\frac{l^2}{12}$

3. $I_{C_2x}(AC) = m\frac{l^2}{12}$

Energétique

4. 1 seul $\theta(t)$

5. Absence de frottement $\rightarrow \delta W_{ex}^{nc} = 0 \rightarrow dE_m = 0 \rightarrow E_m = \underline{cte}$

6. $E_k(AB + AC) = E_k(AB) + E_k(AC)$

avec $E_k(AB) = E_k^*(AB) + \frac{1}{2} m V_{C_1/R}^2 = \frac{1}{2}\vec{L}_{C_1}(AB)\,\vec{\Omega}_{AB/R} + \frac{1}{2} m V_{C_1/R}^2$

$$= \frac{1}{2} I_{C_1x}(AB)\,\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} m \frac{l^2}{4}\dot{\theta}^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{ml^2}{12}\dot{\theta}^2 + \frac{ml^2}{4}\dot{\theta}^2\right)$$

$$E_k(AB) = \frac{1}{6} ml^2\dot{\theta}^2$$

avec $E_k(AB) = E_k(AC) \rightarrow \boxed{E_k(\text{échelle}) = \frac{1}{3} ml^2\dot{\theta}^2}$

7. $E_p = -M_{\text{échelle}}\,\vec{g}\cdot\vec{OG} + \underline{cte}$ où G = centre de masse de l'échelle

$$M_{éch}\,\vec{OG} = 2m\,\vec{OG} = m\,\vec{OC_1} + m\,\vec{OC_2} = m\,2\times\frac{l}{2}\sin\theta\,\vec{e}_3$$

Soit $\boxed{E_p = +mgl\sin\theta + \underline{cte}}$

8. $E_m = E_k + E_p = \frac{1}{3} ml^2\dot{\theta}^2 + mgl\sin\theta + \underline{cte}$

9. $E_m = \underline{cte} = E_m(t=0) = \boxed{mgh = \frac{1}{3} ml^2\dot{\theta}^2 + mgl\sin\theta + \underline{cte}}$

$$\frac{dE_m}{dt} = 0 \Rightarrow \frac{2}{3} ml^2\ddot{\theta} + mgl\cos\theta = 0 \Rightarrow \boxed{\ddot{\theta} + \frac{3g}{2l}\cos\theta = 0}$$

10. $\vec{V}_{A/R} = \vec{V}_{C_2/R} + \vec{AC_2} \wedge \vec{\Omega}_{AC/R}$

$= \frac{l}{2}\dot{\theta}\,\vec{e_\theta} + \vec{AC_2} \wedge (-\dot{\theta}\,\vec{e_x})$ avec $\vec{e_\theta} = -\sin\theta\,\vec{e_y} + \cos\theta\,\vec{e_z}$

$$\boxed{\vec{V}_{A/R} = l\dot{\theta}\cos\theta\,\vec{e_z}}$$

11. Lorsque A touche le sol, $\theta = 0 \rightarrow \frac{1}{3} m l^2 \dot{\theta}^2 = mgh$

$\rightarrow \vec{V}_{A/R} = l\dot{\theta}\,\vec{e_z} = \pm\sqrt{3gh}\,\vec{e_z}$ or $\vec{V}_{A/R}$ selon $-\vec{e_z}$

$$\rightarrow \boxed{\vec{V}_{A/R} = -\sqrt{3gh}\,\vec{e_z}}$$

Dynamique

12. PFD : $2m\,\vec{a}_{G/R} = \vec{N_B} + \vec{T_B} + \vec{N_C} + \vec{T_C} + (2m+M)\vec{g} = \vec{0}$

pour échelle :

$$\left(\frac{d\vec{L_A}}{dt}\right)_R = \vec{\mathcal{M}}_A^{ext} = \vec{0} = \vec{AB} \wedge (\vec{N_B} + \vec{T_B}) + \vec{AC} \wedge (\vec{N_C} + \vec{T_C})$$

$$+ \left(\vec{AC_1} \wedge m\vec{g} + \vec{AC_2} \wedge m\vec{g} + \vec{AH} \wedge M\vec{g}\right)$$

13. PFD appliqué à la barre AC :

$\ast\ m\vec{a}_{C_2/R} = \vec{0} = m\vec{g} + \vec{T_C} + \vec{N_C} + \vec{S_y} + \vec{S_z}$

$$\Leftrightarrow \boxed{\begin{array}{l} T_C + S_y = 0 \quad (1) \\ -mg + N_C + S_z = 0 \quad (2) \end{array}}$$

$\ast$ TMC en A : $\frac{d\vec{L_A}}{dt} = \vec{0} = \vec{AC_2} \wedge m\vec{g} + \vec{AC} \wedge (\vec{T_C} + \vec{N_C})$

$$\rightarrow \vec{0} = \left(\frac{l}{2}\cos\theta\,\vec{e_y} - \frac{l}{2}\sin\theta\,\vec{e_z}\right) \wedge (-mg\,\vec{e_z}) + \begin{vmatrix} 0 \\ l\cos\theta \\ -l\sin\theta \end{vmatrix}_R \wedge \begin{vmatrix} 0 \\ T_C \\ N_C \end{vmatrix}_R$$

$$\boxed{-mg\frac{l}{2}\cos\theta + l\cos\theta\,N_C + l\sin\theta\,T_C = 0} \quad (3)$$

(3) avec expression de N_C : $l\sin\theta\,T_C = +mg\frac{l}{2}\cos\theta - l\cos\theta\,g\left[m + \frac{M}{2}\left(1 - \frac{x}{l}\right)\right]$

$$\boxed{T_C = -\frac{1}{2\tan\theta}\,g\left[m + M\left(1 - \frac{x}{l}\right)\right]}\ ,\ \boxed{T_B = -T_C}$$

14. Equilibre $\|\vec{T}\| \leq \mu \|\vec{N}\|$

$\rightarrow \|\vec{T}_B\| \leq \mu \|\vec{N}_B\|$ et $\|\vec{T}_C\| \leq \mu \|\vec{N}_C\|$

$$\|T_B\| = \|T_C\| \quad \text{et} \quad \left.\begin{array}{l} \|N_B\| = N_B \\ \|N_C\| = N_C \end{array}\right) \text{ et } N_C < N_B$$

$\rightarrow$ l'égalité de la loi de Coulomb se réalise d'abord pour le contact en C $\rightarrow$ (AC) glisse en 1er.